DIGISIGNAALIDE TÖÖTLEMINE

Loengumaterjal 1
Toomas Ruuben

Töökorraldus

- Ainekood: IRZ0030
- Ainepunkte 4.0 (6.0 EAP). Kontrollvormiks on eksam.
- Praktikum reedeti paaritul nädalal 12.00-13.30 U02-407 (NB! Praktikumid algavad 20-ndast veebruarist)
- Loeng+harjutus teisipäeviti 12.00-13.30 U02-403
- Loeng+harjutus kolmapäeviti 10.00-11.30 U03-224

Kirjandus

- Põhiõpik
- Ilmar Arro, Julia Derkats. Digisignaalide töötlemine, TTÜ, 2005, 208 lk.
- Ilmar Arro, Signaalide digitaaltöötlus, TTÜ, 1996, 208 lk.
- A.B.Sergienko, Tsifrovaja obrabotka signalov, Piter 2002 (603 lk)
- John G. Proakis, Digital signal processing PPH,2007
- John G. Proakis, Digital signal processing with MATLAB, PPH, 2007

Käsitletavad teemad

- Pidevsignaali diskreetimine ja kvantimine, dünaamiline diapasoon.
- Digisignaalide taastamine diskreetsete väljavõtete järgi.
- Harmoonilised ja kvaasiharmoonilised digisignaalid.
- Kompleks- ja reaalsignaali diskreetne Fourier' teisendus (DFT) ning kiire Fourier' teisendus (FFT).
- Lõpliku ja piiramatu siirdega digifiltrid (FIR, IIR).
- Sondeerivad signaalid.
- Digisignaali filtrerimise eriprotseduurid (sh. Signaali ja müra võimsuse suhet maksimiseeriv filter, Fourier' teisenduse kasutamine filtreerimisel, sensorvõre jne.)

Käsitletavad teemad

- Digisignaalide kvadratuurse teisendused, Hilberti digimuundur, kvadratuurdemodulaator.
- Signaali parameetrite optimaalne hindamine
  - Signaali amplituudi ja faasi hindamine
  - Signaali mitteenergeetiliste parameetrite hindamine
  - Viiteaja dopleri sagedusnihke hindamine
- Lineaarne ennustamine.
- Sissejuhatus MATLAB-I (1 harjutustund).

Kontrollvorm

- Praktilised tööd
- Kontrolltööd
- Eksam.
  - Bakalauruse lõpueksam (Eksamit võtab vastu 3-e liikmeline dekaani poolt määratud komisjon)
  - Eksam on kirjalik.

Sissejuhatus

- Signaalide digitaalne töötlemine muutus eriti aktuaalseks peale signaaliprotsessorite (DSP) väljatöötamist 1974-ndal aastal (Texas Instruments).
- Tänapäeval rakendatakse kõikjal:
  - Raadio
  - Televisioon
  - Sidesüsteemid
  - Meditsiinitehnika
  - Juhtimissüsteemid
  - Kosmosetehnika
  - Sõjatehnika jne.
- DSP – Spetsialiseeritud protsessorid.

Sissejuhatus

- Digitaalse signaalitöötluse aluseks on algoritm.
- Vastavalt algoritmile koostatakse programm.
- Nii töötlusalgoritm kui programm sõltuvad DSP-st, millele nad on orienteeritud.
- Programm võib olla realiseeritud:
  - ASM
  - C/C++
  - Spetsialiseeritud keeled, skriptid
  - Funktsionaalsed plokid.
- Programmi tuum ehk matemaatiline kirje on reeglina sõltumatu kasutatavast riistvarast ja programmeerimiskeelest.

Sissejuhatus

- Riistvara valikul tuleb lähtuda
  - Algoritmi keerukusest, tema realiseerimiseks vajalikust tehete arvust mingis ajaühikus (sekundis)
  - Nõutud töötluse täpsusest (Fixed point, Floating point)
  - Sisendid/väljundid kokkusobivus muu perifeeriaga.
  - Maksumus
- Käesolevas kursuses on põhitähelepanu eelkõige matemaatilistel kirjetel (algoritmidel). DSP-d käsitletakse magistriõppe tasemel.

Signaalid ja nende omadused

- Lähtudes signaali omadustest saame jagada signaalid järgmistesse klassidesse
  - Regulaarne ja juhuslik signaal (kas kõik signaali elemendid on determineeritud või mitte)
  - Pidevad $s(t)$ ja diskreetsignaalid (kas signaali ajaline argument on pidev või diskreetne) $$s(n) = s_c(nT) \qquad T_s = 1/F_s$$
  - Analoog ja kvanteeritud signaalid (kas signaali amplituud on pidev suurus või diskreetne ehk kvanteeritud)
  - Digitaalsignaalid ehk kvanteeritud diskreetsignaalid mille kvanteeritud nivoode väärtused esitatakse kodeeritud kujul arvkoodis

Signaalid ja nende omadused

- Reaal ja kompleksignaalid
- Lõpliku ja lõputu kestvusega signaalid
- Perioodilised signaalid mille kohta kehtivad seosed:

$$s(t) = s(t+T) \qquad s_T(k,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_0(t-kT)$$

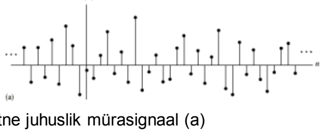
$$s(n) = s(n+N) \qquad s_N(k,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_0(n-kN)$$

Siinjuures T on signaali ajaline periood ja N periood diskreetides

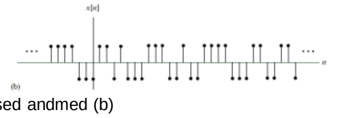
- Sümmeetria omaduste alusel eristatakse paaris- ja paaritu sümmeetriaga signaale mingi argumendi t_0 suhtes.
- Reaal- ja kompleksväärtustega diskreetjada signaalid tekivad ajaliselt pideva signaali ajalise diskteerimise (võendamine, *sampling*) teel tavaliselt konstantse diskreetimissagedusega F_s

Signaalid ja nende omadused

- Diskreetsete juhuslike signaalide näited:

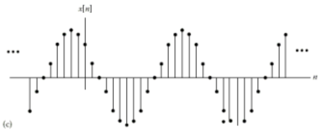


  - Diskreetne juhuslik mürasignaal (a)

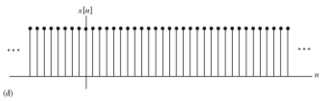


  - Binaarsed andmed (b)

Signaalid ja nende omadused



- Diskreetne juhuslik siinus (c)



- Juhuslik alalispinge diskreetsel kujul

1 Signaalitöötluse põhiprotseduurid

- 1. Pidevsignaali tekitamine
  - Tehislik genereerimine
  - Mõõtmine loodusest
- 2. Pidevsignaali eeltöötlus (filtreerimine vm.)
- 3. Pidevsignaali diskreetimine ja kvantimine (A/D). Tulemuseks digisignaal.
- 4. Digisignaali töötlus DSP-s (vm.)
- 5. Töödeldud digisignaali muundamine pidevsignaaliks (D/A).
- 6. Pidevsignaali järeltöötlus (filtreerimine, võimendamine vm.)

1.1 Pidevsignaali diskreetimine

- Pidevsignaali diskreetimine põhineb deltafunktsiooni filtreerival omadusel

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t_0-t)\mathrm{d}t = s(t_0)$$

- Siinjuures $s(t)$ on suvaline funktsioon (juhuslik protsess)
- $s(t_0)$ on signaali diskreedi väärtus kohal t_0 . Diskreetväärtus saadakse signaali $s(t)$ ja diskreetori impullkaja konvolutsioonina kohal $v = t_0$

$$h_d(v) = \delta(v)$$

Pidevsignaali diskreetimine

- Eelnev puudutas signaali ühe diskreedi leidmist. Kui soovime tekitada signaalist $s(t)$ valimeid erineavatel ajamomentidel peame kordama eelpoolvaadeldud protseduuri erinevate v väärtuste korral

$$v \ni \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

- *n* on siin suvaline etteantud täisarv ja võrdub signaali pikkusega diskreetides. Ühtlase diskreetimissammu juures

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_j - t_{j-1} = \Delta t.$$

Pidevsignaali diskreetimine

- Diskreetori impulsskaja on nüüd avaldatav

$$h_d(v) = h_d(n\Delta t) \quad n \ni \{-\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots \infty\} \quad v = n\Delta t$$

$$h_d(v-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/\Delta t}.$$

ning diskreetori väljundis saame

$$s(v) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)$$

Pidevsignaali diskreetimine

- Kuna erinevate *n* – ide puhul valimid ajaliselt ei kattu ja on sõltumatud siis kehtib seos

$$\sum_{n,m} s(n\Delta t)s(m\Delta t) = 0 \qquad n \neq m,$$

siis edaspidi saame kasutada valimijada kirjeldamiseks kirjet

$$s_d(n) = s_d(n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)$$

- Järgnevalt vaatleme, mille poolest erineb diskreeditud signaali spekter pidevsignaali spektrist

Pidevsignaali diskreetimine (spekter)

- Spektaalosa uurimiseks võtame aluseks seose

$$s_d(n\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/\Delta t} \mathrm{d}t$$

- Eelnev on diskreetori väljundsignaali avaldis kus on arvestatud deltaimpulsside jada kohta käivat võrdust (vt. pidevsignaalid lk. 36-37).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/\Delta t}.$$

- Tähistame diskreetimissageduse $F_d = \dfrac{1}{\Delta t}$,

Pidevsignaali diskreetimine (spekter)

- Diskreetori väljunsgnaal:

$$s_d(n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/\Delta t} \mathrm{d}t$$

- Tehes eelneva võrduse mõlema poole suhtes Fourier' teisenduse, saame

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_d(n\Delta t) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-\Delta t/2}^{n+\Delta t/2} s(n\Delta t) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t =$$

$$= S_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{n-\Delta t/2}^{n+\Delta t/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j2\pi F_d nt} e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t =$$

Pidevsignaali diskreetimine (spekter)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{n-\Delta t/2}^{n+\Delta t/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi(f - nF_d)t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nF_d) \frac{1}{\Delta t} \int_{n-\Delta t/2}^{n+\Delta t/2} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nF_d),$$

- Seega on diskreetse signaali spekter algsignaali spektri perioodiliste korduste summa

$$S_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nF_d)$$

Pidevsignaali diskreetimine (spekter)

- Üldjuhul pole diskreetse signaali spektrist $S_d(f)$ Fourier' pöördteisendusega algsignaali $s(t)$ taastamine võimalik.
- Algsignaali $s(t)$ taastamisesk peavad olema täidetud teatud tingimused
  - Algsignaali spektri kordused ei tohi omavahel kattuda ehk

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nF_d) = S(f - nF_d) \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f - nF_d) S(f - mF_d) \mathrm{d}f = 0 \qquad m \neq n$$

  - Et eelnev oleks täidetud, peab algsignaali spekter olema piiratud vastavalt tingimustele (vt. Järgmine slaid)

Pidevsignaali diskreetimine (spekter)

$$A(f) = |S(f)| = 0\,, \quad \text{kui} \quad |f| \geq \frac{F_d}{2}$$

- Tähistades lähtesignaali spektri maksimaalset lubatavat sagedust f_m -ga ehk

$$A(f) \neq 0\,, \quad \text{kui} \quad |f| \leq f_m$$

saame väita, et ortogonaalsuse tingimus on täidetud (spektrikomponendid ei kattu) kui diskreetimise sagedus ületab kahekordselt lähtesignaali spektri maksimaalse sageduse

$$F_d > 2 f_m \qquad F_{d\,\min} = 2 f_m + 1$$

Pidevsignaali diskreetimine (spekter)

- Kui eelpooltoodud tingimused on täidetud, saame taastada algsignaali $s(t)$ transponeerides $S(f - nF_d)$ nullsageduse piirkonda. Kui $n = 0$ pole sageduse transponeerimist vaja teostada (piisab MPF).
- Leiame signaali $$u_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f - nF_d) e^{j2\pi ft} \mathrm{d}f.$$
- Tehes asendused

$$f - nF_d = z\,, \quad df = dz\,, \quad f = z + nF_d$$

$$u_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(z) e^{j2\pi zt} \mathrm{d}z \cdot e^{j2\pi nF_d t} = s(t) e^{j2\pi nF_d t}$$

Pidevsignaali diskreetimine

- Lähtuvalt eelnevast (eelmine slaid), avaldub lähtesignaal

$$s(t) = u_n(t)e^{-j2\pi n F_d t}$$

- Digitöötluse oluliseks eripäraks on töötlusintervalli piiramine ehk DSP suudab haarata vaid lõpliku arvu *N* diskreete.
- Diskreetne signaalijada $s_d(n)$ tuleb tükeldada segmentideks pikkusega *N* ning töötluse lõpptulemus formeeritakse segmenttöötluse saadustest.
- Üks segment sisaldab $N = T/\Delta t$ diskreeti. *T* - töötlusintervall

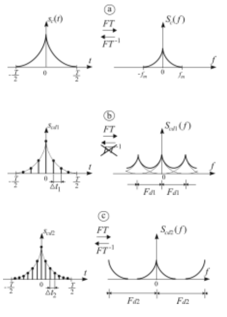
Pidevsignaali diskreetimine (paaris ja paaritud komponendid)

- Signaal $s(t)$ on lõplikus ajavahemikus *T* esitatav paaris ja paaritu komponendi kaudu. Oluline on, et paariskomponendi spekter on samuti paarisfnktsioon ning paaritu komponendi spekter samuti paaritu funktsioon, ehk kehtivad võrdused

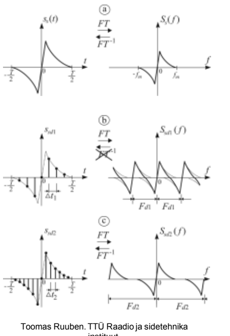
$$S_c(f) = S_c(-f),$$
$$S_s(f) = -S_s(-f).$$

- Järgnevatel joonistel on eraldi välja toodud diskreetimise sammu Δt mõju paaris ja paaritu komponendi spektrile

Pidevsignaali diskreetimine (paarissignaali spekter)



Pidevsignaali diskreetimine (paaritu signaali spekter)



Pidevsignaali diskreetimine

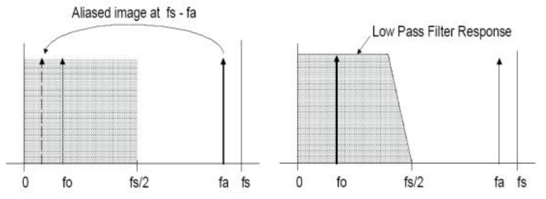
- Eelnevatelt joonistelt on näha, et variant *b* korral toimub spektrite omavaheline kattumine mille tõttu signaali taastamine pole enam võimalik
- Kui F_d on küllalt suur (variant *c*) siis igas korduvas spektri $S_d(f)$ perioodis kohtame moonutusteta $S(f)$ piirkonda mille järgi algsignaal $s(t)$ on taastatav Fourier' pöördteisendusega.
- Kokkuvõte (vt. järgmine slaid)

Pidevsignaali diskreetimine (Kokkuvõte)

- Signaali diskreetimine kutsub esile spektri perioodilisuse sagedusalas;
- Kui $F_d < 2f_m$ siis diskreetsignaali spekter sisaldab ülekattumisest tingitud teisendatud piirkondi;
- Kui $F_d > 2f_m$ siis diskreetsignaali spektris perioodidevaheline ülekate puudub;
- Algsignaal taastub, kui filtreerida diskreetsignaali spektrist välja lõik, mis vastab algsignaali spektrile;
- Arvestades mürade olemasoluga, tuleb praktikas enne diskreetorit alati piirata diskreetori sisendsignaali sagedusriba, et oleks täidetud tingimus $A(f) = 0, \quad |f| \geq f_m$

Pidevsignaali diskreetimine (Kokkuvõte)

- Nyquisti kriteerium ribas

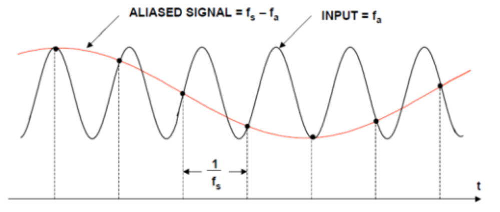


- Ilma MPF-ta tekib spektris parasiitsagedus

$$fs - fa$$

Pidevsignaali diskreetimine (Kokkuvõte)

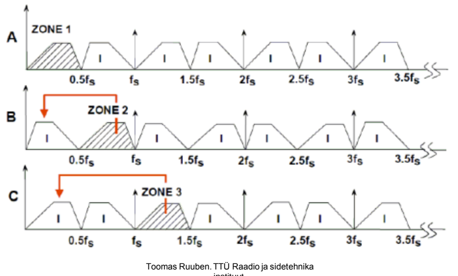
- Parasiitsageduste tekkimine



- Kõrgem sagedus transformeerub madalamale

Pidevsignaali diskreetimine (Kokkuvõte)

- Harmooniliste diskreetimine (undersampling)



Pidevsignaali diskreetimine (Kokkuvõte)

- Et võtta vastu sagedusi vahemikus

$$fs/2 - fs$$

  - Kasutame ribafiltrit läbilaskeribaga $fs/2 - fs$
  - Sagedused vahemikust $fs/2 - fs$ transformeeruvad peegelkujutisena vahemikku

$$DC - fs/2$$

  - Sagedused vahemikus $f_s - 1.5 f_s$ transformeeruvad samuti vahemikku $DC - fs/2$ kuid päripidi
  - Reegel: Paaristsoonid peegelkujutisena, paaritud päripidi

1.2 Signaali spektri diskreetimine

- Signaalide digitaaltöötlusel on oluline oskus opereerida võrdväärselt nii aeg- kui ka sagedusruumis.
- Üleminek pidevalt signaalilt diskreetsele jadale toob kaasa põhimõtteliselt uudse spektraalteisenduse: sagedusalas piiratud spekter laotub üle kogu sagedusala perioodilise kordusena.
- Lähtudes aja ja sageduse duaalsusest, võime väita: ajas piiratud reaalsignaali spektri diskreetimine tekitab uue signaali, mis laotub üle kogu ajaruumi perioodilise kordusena.
- Väite tõestuseks lähtume diskreetori impulsskajast

Signaali spektri diskreetimine

- Diskreetori impulsskaja (sagedusülekandefunktsioon)

$$H_d(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n\Delta f)=\frac{1}{\Delta f}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi fn/\Delta f},$$

- Diskreetne spekter pidevast spektrist

$$S_d(f)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n\Delta f)df=\sum_{n=-\infty}^{\infty}S(n\Delta f)=S_d(n)$$

- Nüüd otsime $S_d(n)$ järgi Fourier' teisenduse abil sellele vastavat signaali aegruumis ehk (vt. Järgmine slaid)

Signaali spektri diskreetimine

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_d(n) e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f = s_d(t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta f} \int_{n-\Delta f/2}^{n+\Delta f/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f (t - nT_k)} \mathrm{d}f \right) \mathrm{d}f =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT_k),$$

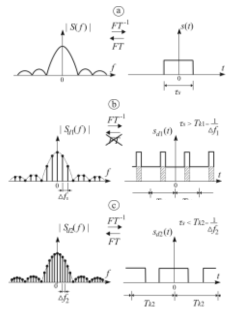
ehk

$$s_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT_k),$$

kus

$$T_k = 1/\Delta f.$$

Signaali spektri diskreetimise mõju signaalile ajas



Signaali spektri diskreetimine (Kokkuvõte)

- Spektri diskreetimine kutsub esile signaali perioodilisuse ajas;
- kui diskreetimise sammu Δf pöördväärtus T_k on väiksem signaali kestusest τ_s, s.t $T_k < \tau_s$, siis signaali perioodilisel jätkamisel tekivad ülekattumisega piirkonnad;
- kui $T_k > \tau_s$, siis signaali perioodiline kordus tekitab sõltumatute (ilma ülekatteta) impulsside jada;
- algsignaal on taastatav perioodilisest impulsside jadast ühe sõltumatu signaali ajalise selekteerimisega.