

ГЛАВА 5

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

- Дискретное преобразование Фурье
- Быстрое преобразование Фурье (БПФ)
- Аппаратное исполнение и тестирование БПФ
- Требования ЦОС для БПФ приложений в режиме реального времени
- Эффект расширения спектра сигналов при БПФ и использование взвешивания с функций окна

а

ГЛАВА 5

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Уолт Кестер

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В 1807 французский математик и физик Жан Батист Жозеф Фурье представил во Французский Институт (*Institut de France*) доклад о синусоидальном представлении температурных распределений. Доклад содержал спорное утверждение о том, что любой непрерывный периодический сигнал может быть представлен суммой выбранных должным образом сигналов синусоидальной формы. Среди членов комитета, занимавшихся обзором публикаций, были два известных математика – Жозеф Луи Лагранж и Пьер Симон де Лаплас. Лагранж категорически возразил против публикации на основании того, что подход Фурье неприменим к разрывным функциям, таким как сигналы прямоугольной формы. Работа Фурье была отклонена, прежде всего из-за возражения Лагранжа, и была издана после смерти Лагранжа, приблизительно пятнадцатью годами позже. Интересно, что времена Фурье совпали с важными политическими событиями: экспедициями Наполеона в Египет и попытками избежать гильотины после Французской Революции! (Эта историческая справка получена из Приложения 1, стр.141).

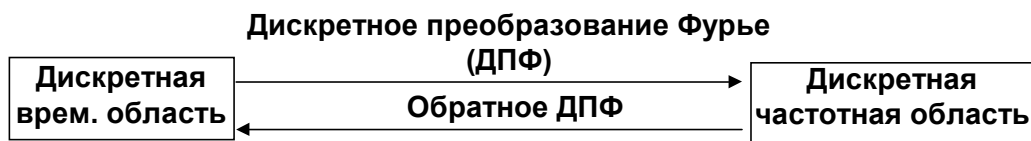
На самом деле и Фурье, и Лагранж были, по крайней мере частично, правы. Лагранж был прав в том, что суммированием сигналов синусоидальной формы невозможно точно сформировать сигнал, содержащий вертикальный фронт. Но можно очень точно к нему приблизиться, если использовать достаточное количество гармонических сигналов. (Это описывается эффектом Гиббса и сегодня хорошо понятно ученым, инженерам и математикам).

Анализ Фурье закладывает основы многих методов, применяющихся в области цифровой обработки сигналов (ЦОС). По сути дела, преобразование Фурье (фактически существует несколько вариантов таких преобразований) позволяет сопоставить сигналу, заданному во временной области, его эквивалентное представление в частотной области. Наоборот, если известна частотная характеристика сигнала, то обратное преобразование Фурье позволяет определить соответствующий сигнал во временной области.

В дополнение к частотному анализу, эти преобразования полезны при проектировании фильтров. Частотная характеристика фильтра может быть получена посредством преобразования Фурье его импульсной реакции. И наоборот, если определена частотная характеристика сигнала, то требуемая импульсная реакция может быть получена с помощью обратного преобразования Фурье над его частотной характеристикой. Цифровые фильтры могут быть созданы на основе их импульсной реакции, поскольку коэффициенты фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ) идентичны дискретной импульсной реакции фильтра.

Семейство преобразований Фурье (преобразование Фурье, ряды Фурье, дискретные ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье) представлено на рис.5.2. С течением времени принятые определения получили развитие (не обязательно вполне логичное) в зависимости от того, является ли сигнал непрерывно-апериодическим (*continuous-aperiodic*), непрерывно-периодическим (*continuous-periodic*), дискретно-апериодическим (*sampled-aperiodic*) или дискретно-периодическим (*sampled-periodic*). В данном контексте термин *sampled* означает то же самое, что *discrete* (дискретный) (то есть дискретные по времени выборки).

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ (ДПФ)



- Цифровой спектральный анализ
 - ◆ Анализаторы спектра
 - ◆ Обработка речи
 - ◆ Обработка изображений
 - ◆ Распознавание образов

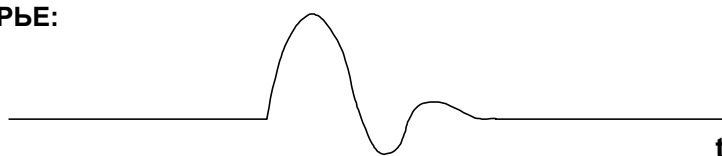
- Проектирование фильтров
 - ◆ Вычисление импульсной характеристики по частотной
 - ◆ Вычисление частотной характеристики по импульсной

- Быстрое преобразование Фурье (БПФ) – это простой алгоритм для эффективного вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

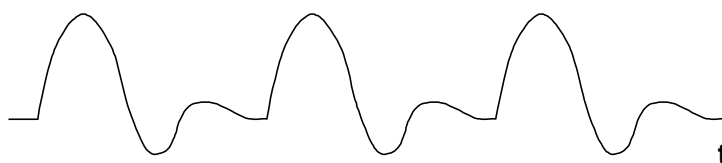
Рис. 5.1

СЕМЕЙСТВО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ КАК ФУНКЦИЯ СИГНАЛА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

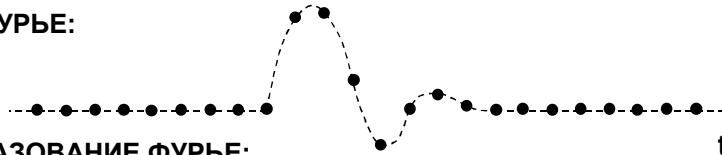
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ:
сигнал непрерывный и
апериодический



РЯДЫ ФУРЬЕ:
сигнал непрерывный
и периодический



ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ:
сигнал дискретный
и апериодический



ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ:
(дискретные ряды Фурье)
сигнал дискретный
и периодический

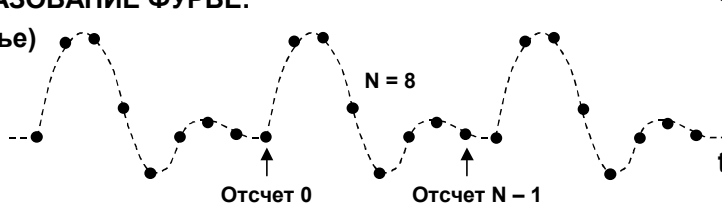


Рис. 5.2

а

Единственный член этого семейства, который имеет отношение к цифровой обработке сигналов, – это дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое оперирует дискретной по времени выборкой периодического сигнала во временной области. Для того, чтобы быть представленным в виде суммы синусоид, сигнал должен быть периодическим. Но в качестве набора входных данных для ДПФ доступно только конечное число отсчетов (N). Эту дилемму можно разрешить, если мысленно поместить бесконечное число одинаковых групп отсчетов до и после обрабатываемой группы, образуя, таким образом, математическую (но не реальную) периодичность, как показано на рис.5.2.

Фундаментальное уравнение для получения N -точечного ДПФ выглядит следующим образом:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(2\pi nk/N) - j\sin(2\pi nk/N)]$$

По отношению к этому уравнению следует сделать некоторые терминологические разъяснения (также см. рис.5.3). $X(k)$ (прописная буква X) представляет собой частотный выход ДПФ в k -ой точке спектра, где k находится в диапазоне от 0 до $N-1$. N представляет собой число отсчетов при вычислении ДПФ.

Обратите внимание, что " N " не следует путать с разрешающей способностью АЦП или ЦАП, которая в других главах данной книги также обозначается буквой N .

Значение $x(n)$ (строчная буква x) представляет собой n -ый отсчет во временной области, где n также находится в диапазоне от 0 до $N-1$. В общем уравнении $x(n)$ может быть вещественным или комплексным.

Обратите внимание, что косинусоидальные и синусоидальные компоненты в уравнении могут быть выражены в полярных или прямоугольных координатах, связь между которыми определяется формулой Эйлера:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Выходной спектр ДПФ $X(k)$ является результатом вычисления свертки между выборкой, состоящей из входных отсчетов во временной области, и набором из N пар гармонических базисных функций (косинус и синус). Концепцию хорошо иллюстрирует рис.5.4, на котором представлена вещественная часть первых четырех точек спектра (показаны только косинусоидальные гармонические базисные функции). Подобная же процедура используется для вычисления мнимой части спектра на основе синусоидальных функций.

Первая точка $X(0)$ является простой суммой входных отсчетов во временной области, потому что $\cos(0) = 1$. Коэффициент масштабирования $1/N$ не учитывается, но должен присутствовать в конечном результате. Обратите внимание, что $X(0)$ – это среднее значение отсчетов во временной области, или просто смещение по постоянному току. Вторая точка $\text{Re}X(1)$ получена умножением каждого отсчета из временной области на соответствующее значение косинусоиды, имеющей один полный период на интервале N , с последующим суммированием результатов. Третья точка $\text{Re}X(2)$ получена умножением каждого отсчета из временной области на соответствующую точку косинусоиды, которая имеет два полных периода на интервале N , с последующим суммированием результатов. Точно так же, четвертая точка $\text{Re}X(3)$ получена умножением каждого отсчета из временной области на соответствующую точку косинусоиды с тремя полными периодами на интервале N и суммированием результатов. Этот процесс продолжается, пока не будут вычислены все N выходных отсчетов. Подобная процедура, но с использованием синусоид, применяется для вычисления мнимой части частотного спектра. Косинусоиды и синусоиды являются базисными функциями данного преобразования.

а

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ДПФ)

- Периодический сигнал может быть разложен на сумму выбранных должным образом косинусоидальных и синусоидальных функций (Жан Батист Жозеф Фурье, 1807)
- ДПФ работает с конечным числом (N) оцифрованных по времени отсчетов $x(n)$. Когда эти группы отсчетов повторяются, они становятся периодическими с точки зрения преобразования
- Комплексный спектральный выход ДПФ $X(k)$ является результатом свертки входных отсчетов с базисными функциями синуса и косинуса:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos \frac{2\pi nk}{N} - j \sin \frac{2\pi nk}{N} \right]$$

$0 \leq k \leq N-1$

Рис. 5.3

СВЕРТКА ОТСЧЕТОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ С БАЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПРИ ДПФ ДЛЯ N=8

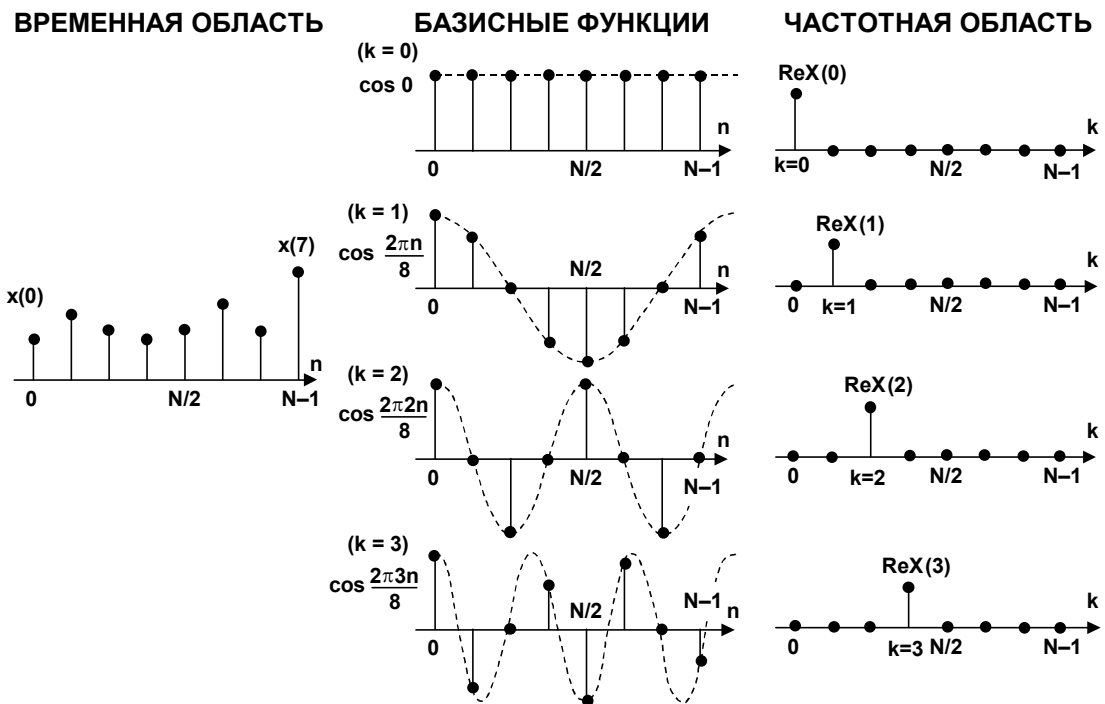


Рис. 5.4

Предположим, что входной сигнал является косинусоидальным, имеющим период N , то есть он содержит один полный период в нашей выборке. Также примем его амплитуду и фазу идентичными первой косинусоидальной базисной функции $\cos(2\pi n/8)$. Выходной спектр содержит одну ненулевую точку $\text{Re}X(1)$, а все другие точки $\text{Re}X(k)$ являются нулевыми. Предположим, что теперь входная косинусоида сдвинута вправо на 90° . Значение свертки между ней и соответствующей базисной косинусоидальной функцией

а

равно нулю. Но алгоритм преобразования предполагает вычисление свертки с базисной функцией $\sin(2\pi n/8)$, необходимое для получения $\text{Im}X(1)$. Это показывает, почему необходимо рассчитывать и вещественные, и мнимые части спектра для определения и амплитуды и фазы частотного спектра.

Обратите внимание, что свертка синусоидальной/косинусоидальной функции любой частоты, отличной от частоты базовой функции, дает нулевое значение и для $\text{Re}X(1)$, и для $\text{Im}X(1)$.

Подобная процедура применяется при вычислении обратного ДПФ для восстановления отсчетов во временной области $x(n)$ из отсчетов в частотной области $X(k)$.

Соответствующее уравнение выглядит следующим образом:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) [\cos(2\pi nk/N) + j \sin(2\pi nk/N)]$$

Существует два основных типа ДПФ: вещественное ДПФ и комплексное ДПФ.

Уравнения, представленные на рис.5.5, описывают комплексное ДПФ, где и входные, и выходные величины являются комплексными числами. Так как входные отсчеты во временной области являются вещественными и не имеют мнимой части, мнимая часть входных отсчетов всегда принимается равной нулю. Выход ДПФ $X(k)$ содержит вещественную и мнимую компоненты, которые могут быть преобразованы в амплитуду и фазу.

Вещественное ДПФ выглядит несколько проще и, в основном, является упрощением комплексного ДПФ. Большинство алгоритмов вычисления быстрого преобразования Фурье (БПФ) составлено с использованием формата комплексного ДПФ, поэтому важно понимать, как работает комплексное ДПФ и как оно соотносится с вещественным ДПФ. В частности, если известны выходные частоты вещественного ДПФ и требуется использовать обратное комплексное ДПФ для вычисления отсчетов во временной области, надо знать, как разместить выходные точки вещественного ДПФ в формате комплексного ДПФ перед выполнением обратного комплексного ДПФ.

На рис.5.6 показаны исходные данные и результаты вычислений вещественного и комплексного БПФ (FFT). Обратите внимание, что результат вычисления вещественного ДПФ дает вещественные и мнимые значения $X(k)$, где k находится в диапазоне от 0 до $N/2$. При этом мнимые точки $\text{Im}X(0)$ и $\text{Im}X(N/2)$ всегда равны 0, потому что равны 0 $\sin(0)$ и $\sin(n\pi)$.

Результат вычислений в частотной области $X(N/2)$ соответствует частотному диапазону, равному половине частоты дискретизации f_s . Ширина каждого элемента разрешения по частоте равна f_s/N .

а

КОМПЛЕКСНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ДФФ)

ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ $\leftarrow\leftarrow$ ДПФ $\leftarrow\leftarrow$ ВРЕМЕННАЯ ОБЛАСТЬ

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos \frac{2\pi nk}{N} - j \sin \frac{2\pi nk}{N} \right]$$

$W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$

 $= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$

ВРЕМЕННАЯ ОБЛАСТЬ $\leftarrow\leftarrow$ ОБРАТНОЕ ДПФ $\leftarrow\leftarrow$ ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\cos \frac{2\pi nk}{N} + j \sin \frac{2\pi nk}{N} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Рис. 5.5

ВХОДНЫЕ/ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДПФ

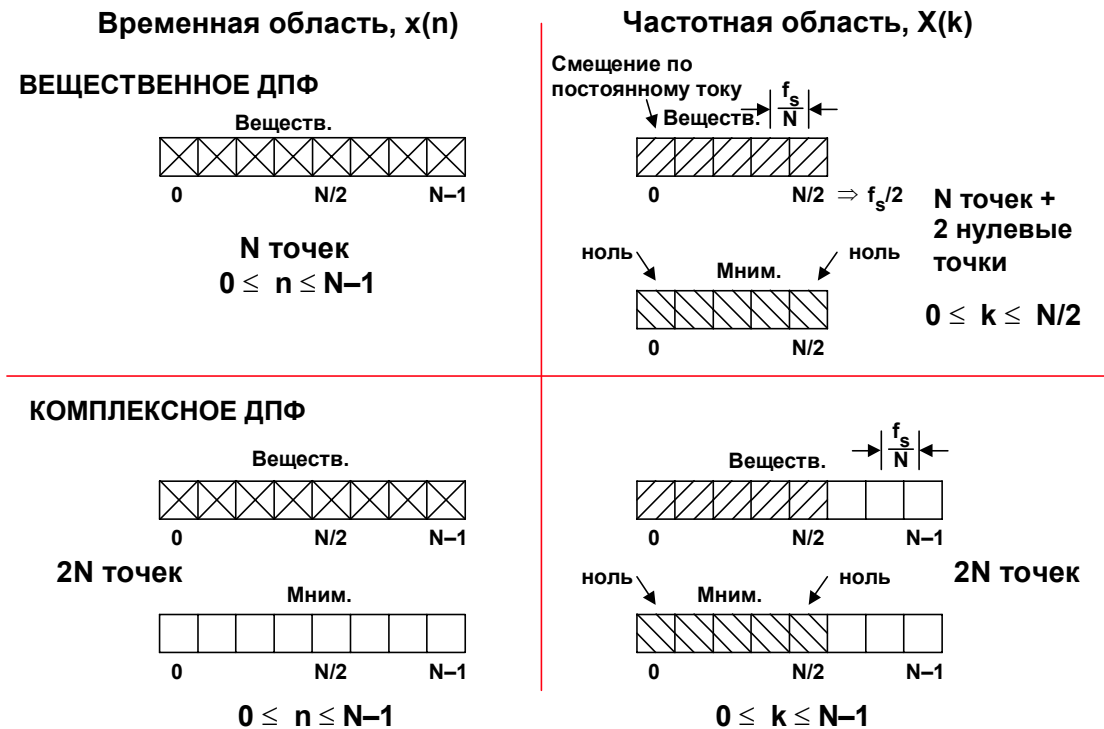


Рис. 5.6

а

Комплексное ДПФ имеет вещественные и мнимые значения и на входе, и на выходе. Практически, мнимые части отсчетов во временной области устанавливаются в ноль. При рассмотрении спектра, получаемого в результате вычисления комплексного ДПФ, полезно знать, как связать его с результатом вычисления вещественного ДПФ и наоборот. Заштрихованные области в диаграмме соответствуют точкам, которые являются общими и для вещественного, и для комплексного ДПФ.

Рис.5.7 раскрывает отношение между вещественным и комплексным ДПФ более подробно. Выходные точки вещественного ДПФ располагаются в диапазоне от 0 до $N/2$, причем значения $\text{Im}X(0)$ и $\text{Im}X(N/2)$ всегда равны 0. Точки между $N/2$ и $N - 1$ содержат отрицательные частоты в комплексном ДПФ. Обратите внимание, что $\text{Re}X(N/2+1)$ имеет такое же значение, как и $\text{Re}X(N/2-1)$. Точно так же, $\text{Re}X(N/2 + 2)$ имеет такое же значение, как и $\text{Re}X(N/2-2)$ и т.д. Видно, также, что $\text{Im}X(N/2+1)$ равно $\text{Im}X(N/2-1)$, но взято со знаком минус, и $\text{Im}X(N/2+2)$ равно $\text{Im}X(N/2 - 2)$, но взято со знаком минус и т.д. Другими словами, $\text{Re}X(k)$ имеет четную симметрию относительно $N/2$, а $\text{Im}X(k)$ имеет нечетную симметрию относительно $N/2$. Таким образом, на основе вещественных компонентов ДПФ могут быть сгенерированы отрицательные частотные компоненты комплексного БПФ.

Уравнения для комплексного и вещественного ДПФ приводятся на рис.5.8. Видно, что уравнения для комплексного ДПФ работают почти одинаково, будь то процедура вычисления ДПФ $X(k)$ или обратного ДПФ $x(n)$. Вещественное ДПФ не использует комплексные числа, и уравнения для $X(k)$ и $x(n)$ существенно различаются. Также перед использованием уравнения для вычисления отсчетов во временной области $x(n)$, значения $\text{Re}X(0)$ и $\text{Re}X(N/2)$ должны быть поделены на два. Эти подробности объясняются в главе 31 книги, приведенной в списке литературы под номером 1, и читатель может изучить данный материал перед тем, как использовать эти уравнения.

ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ КОМПОНЕНТ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ КОМПЛЕКСНОГО ДПФ ПО ВЕЩЕСТВЕННОМУ ДПФ

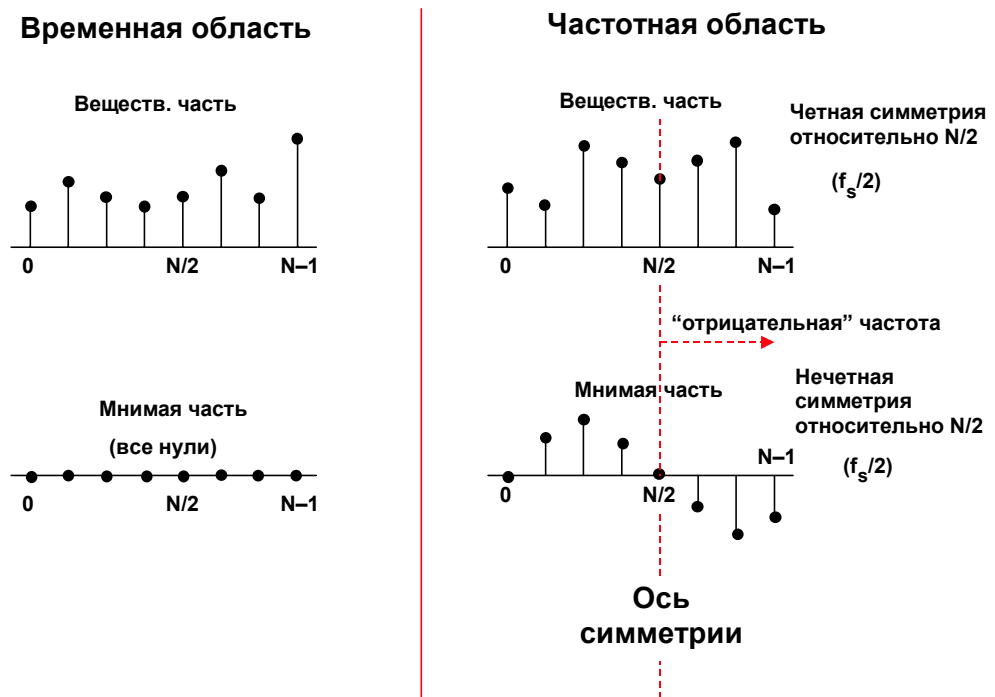


Рис. 5.7

а

Выходной спектр ДПФ может быть представлен либо в полярной системе координат (амплитудой и фазой), либо в алгебраической форме (вещественной и мнимой частями), как показано на рис.5.9. Обе указанных формы находятся во взаимно однозначном соответствии.

УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО И ВЕЩЕСТВЕННОГО ДПФ

Комплексное преобразование

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}$$

Временная область: $x(n)$ является комплексной, дискретной и периодической величиной. n изменяется в диапазоне от 0 до $N-1$
 Частотная область: $X(k)$ является комплексной, дискретной и периодической величиной. k изменяется в диапазоне от 0 до $N-1$
 Для k от 0 до $N/2$ – положительные частоты
 Для k от $N/2$ до $N-1$ – отрицательные частоты

Вещественное преобразование

$$\text{Re}X(k) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(2\pi nk/N)$$

$$\text{Im}X(k) = \frac{-2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin(2\pi nk/N)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N/2} \left[\text{Re}X(k) \cos(2\pi nk/N) - \text{Im}X(k) \sin(2\pi nk/N) \right]$$

Временная область: $x(n)$ является вещественной, дискретной и периодической величиной. n изменяется в диапазоне от 0 до $N-1$
 Частотная область:
 $\text{Re}X(k)$, $\text{Im}X(k)$ являются вещественными, дискретными и периодическими величинами. k изменяется в диапазоне от 0 до $N/2$

Перед использованием уравнения x для вычисления (n) значения $\text{Re}X(0)$ и $\text{Re}X(N/2)$ должны быть поделены на два.

Рис. 5.8

а

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И МНИМЫХ КОМПОНЕНТ ДПФ В АМПЛИТУДУ (MAG) И ФАЗУ (φ)

$$\blacksquare \quad X(k) = \operatorname{Re}X(k) + j \operatorname{Im}X(k)$$

$$\blacksquare \quad \operatorname{MAG}[X(k)] = \sqrt{\operatorname{Re}X(k)^2 + \operatorname{Im}X(k)^2}$$

$$\blacksquare \quad \varphi[X(k)] = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}X(k)}{\operatorname{Re}X(k)}$$

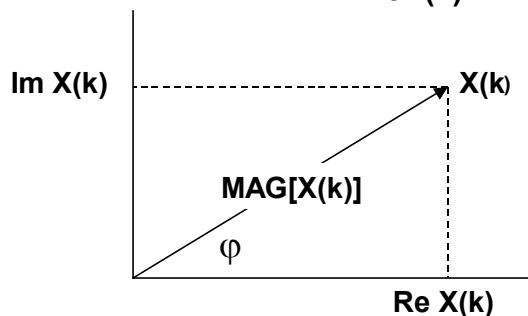


Рис. 5.9

Быстрое преобразование Фурье

Для понимания принципов работы БПФ, рассмотрим ДПФ на 8 точек, представленное на рис.5.10 в развернутом виде. Обратите внимание, что для упрощения таблицы мы вводим следующее определение:

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Это ведет к определению коэффициентов поворота (поворачивающих множителей):

$$W_N^{nk} = e^{-j2\pi nk/N}$$

Коэффициенты поворота представляют базисные гармонические функции, записанные в экспоненциальной форме. Обратите внимание, что 8-точечное ДПФ, представленное на диаграмме, требует 64 операций умножения с комплексными числами. N-точечное ДПФ требует N^2 операций умножения с комплексными числами. Знание количества умножений важно потому, что на реализацию операций умножения затрачиваются существенные вычислительные ресурсы DSP. В действительности, общее время, требуемое для вычисления ДПФ, прямо пропорционально числу умножений с учетом необходимого числа дополнительных операций.

а

8-ТОЧЕЧНОЕ ДПФ (N = 8)

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$X(0) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^0 + x(2)W_8^0 + x(3)W_8^0 + x(4)W_8^0 + x(5)W_8^0 + x(6)W_8^0 + x(7)W_8^0$
$X(1) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^1 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^3 + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^5 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^7$
$X(2) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^2 + x(2)W_8^4 + x(3)W_8^6 + x(4)W_8^8 + x(5)W_8^{10} + x(6)W_8^{12} + x(7)W_8^{14}$
$X(3) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^3 + x(2)W_8^6 + x(3)W_8^9 + x(4)W_8^{12} + x(5)W_8^{15} + x(6)W_8^{18} + x(7)W_8^{21}$
$X(4) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^4 + x(2)W_8^8 + x(3)W_8^{12} + x(4)W_8^{16} + x(5)W_8^{20} + x(6)W_8^{24} + x(7)W_8^{28}$
$X(5) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^{10} + x(3)W_8^{15} + x(4)W_8^{20} + x(5)W_8^{25} + x(6)W_8^{30} + x(7)W_8^{35}$
$X(6) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^6 + x(2)W_8^{12} + x(3)W_8^{18} + x(4)W_8^{24} + x(5)W_8^{30} + x(6)W_8^{36} + x(7)W_8^{42}$
$X(7) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^7 + x(2)W_8^{14} + x(3)W_8^{21} + x(4)W_8^{28} + x(5)W_8^{35} + x(6)W_8^{42} + x(7)W_8^{49}$

N^2 умножений с комплексными числами
 $\frac{1}{N}$ Не учтенный масштабный коэффициент

Рис. 5.10

Быстрое преобразование Фурье (FFT) является не более чем алгоритмом для ускоренного вычисления ДПФ путем сокращения требуемого числа операций умножения и сложения. Данное преобразование было предложено Кули и Таки (J.W.Cooley и J.W.Tukey) в 1960-ых годах и фактически являлось открытием заново идеи Рунге, Даниэльсона и Ланкоса (Runge (1903), Danielson и Lanczos (1942)). Первое упоминание данной идеи встречается еще задолго до появления компьютеров и калькуляторов, когда численные вычисления могли занимать много часов. Кроме того, более чем столетием раньше данный метод использовал немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777 - 1855).

Для понимания основных концепций БПФ и его происхождения, полезно обратить внимание, что ДПФ, показанное на рис.5.10 в развернутом виде, может быть сильно упрощено, если использовать свойства симметрии и периодичности коэффициентов поворота, как показано на рис.5.11. Результатом переработки выражений для ДПФ является быстрое преобразование Фурье (FFT), которое требует только $(N/2)\log_2(N)$ умножений комплексных чисел. Вычислительная эффективность БПФ по сравнению с ДПФ становится весьма существенной, когда количество точек БПФ увеличивается до нескольких тысяч, как это следует из рис.5.12. Очевидно, что БПФ вычисляет все компоненты выходного спектра (или все, или ни одного!). Если необходимо рассчитать только несколько точек спектра, ДПФ может оказаться более эффективным. Вычисление одного выходного отсчета спектра с использованием ДПФ требует только N умножений с комплексными числами.

а

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ И ПЕРИОДИЧНОСТИ ПОВОРАЧИВАЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ W_N^r

симметричность: $W_N^{r+N/2} = -W_N^r$, периодичность: $W_N^{r+N} = W_N^r$

$N = 8$

$W_8^4 = W_8^{0+4} = -W_8^0 = -1$
$W_8^5 = W_8^{1+4} = -W_8^1$
$W_8^6 = W_8^{2+4} = -W_8^2$
$W_8^7 = W_8^{3+4} = -W_8^3$
$W_8^8 = W_8^{0+8} = +W_8^0 = +1$
$W_8^9 = W_8^{1+8} = +W_8^1$
$W_8^{10} = W_8^{2+8} = +W_8^2$
$W_8^{11} = W_8^{3+8} = +W_8^3$
● ● ●
● ● ●
● ● ●

Рис. 5.11

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (БПФ) ПО СРАВНЕНИЮ С ДИСКРЕТНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ (ДПФ)

- БПФ является лишь алгоритмом эффективного вычисления ДПФ
- Вычислительная эффективность N-точечного БПФ:
 - ДПФ: N^2 вычислений с комплексными числами
 - БПФ: $(N/2) \log_2(N)$ вычислений с комплексными числами

N	Умножений при ДПФ	Умножений при БПФ	Эффективность БПФ
256	65,536	1,024	64 : 1
512	262,144	2,304	114 : 1
1,024	1,048,576	5,120	205 : 1
2,048	4,194,304	11,264	372 : 1
4,096	16,777,216	24,576	683 : 1

Рис. 5.12

а

Алгоритм БПФ по основанию 2 разделяет полное вычисление ДПФ на комбинацию 2-точечных ДПФ. Каждое 2-точечное ДПФ содержит базовую операцию умножения с накоплением, называемую «бабочкой» и иллюстрируемую на рис.5.13. На диаграмме показаны два представления «бабочки»: верхняя диаграмма фактически является функциональным представлением «бабочки», построенным на цифровых умножителях и сумматорах. В упрощенной нижней диаграмме операции умножения помечаются множителем возле стрелки, а под суммированием подразумеваются две стрелки, сходящиеся в точке.

8-точечное БПФ с прореживанием во времени (decimation-in-time, DIT) вычисляет окончательный результат с использованием трех каскадов, как это следует из рис.5.14. Восемь входных отсчетов из временной области сначала разделяются (или прореживаются) на четыре группы 2-точечных ДПФ. Затем четыре 2-точечных ДПФ объединяются в два 4-точечных ДПФ. Затем два 4-точечных ДПФ объединяются для того, чтобы получить окончательный результат $X(k)$. Подробно процесс рассмотрен на рис.5.15, где показаны все операции умножения и суммирования. Нетрудно заметить, что базовая операция «бабочки» 2-точечного ДПФ формирует основу для всего вычисления. Вычисление осуществляется в трех каскадах. После того, как заканчивается вычисление первого каскада, нет необходимости сохранять какие-либо предыдущие результаты. Результаты вычисления первого каскада могут быть сохранены в тех же самых регистрах или ячейках памяти, которые первоначально хранили исходные отсчеты из временной области $x(n)$. Точно так же, когда заканчивается вычисление второго каскада, результаты вычисления первого каскада могут быть удалены. Таким же образом осуществляется вычисление последнего каскада, заменяя в памяти промежуточный результат вычисления предыдущего каскада. Обратите внимание, что для того, чтобы алгоритм работал должным образом, входные отсчеты по времени $x(n)$ должны быть упорядочены определенным образом с использованием алгоритма реверсирования битов.

БАЗОВАЯ ОПЕРАЦИЯ «БАБОЧКА» В АЛГОРИТМЕ БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

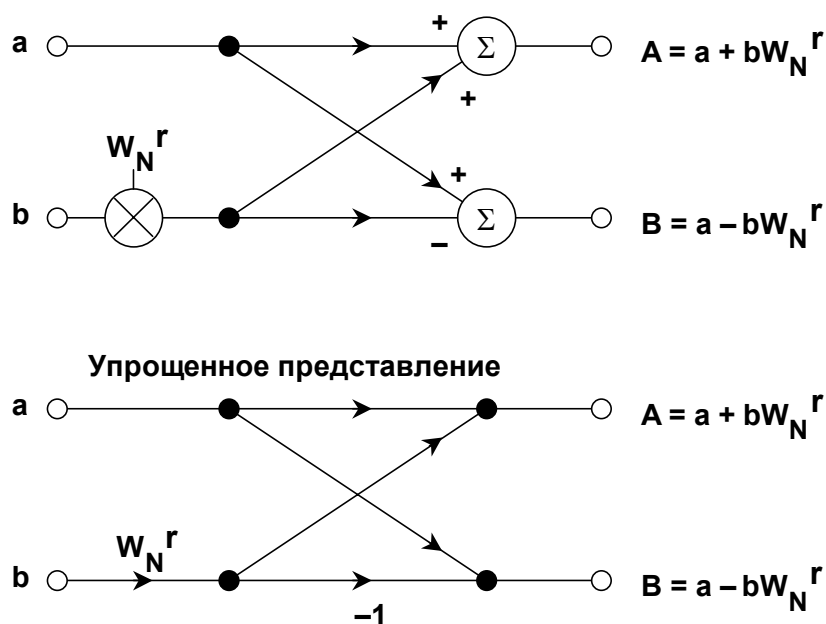


Рис. 5.13

а

ВЫЧИСЛЕНИЕ 8-ТОЧЕЧНОГО ДПФ В ТРЕХ КАСКАДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОРЕЖИВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

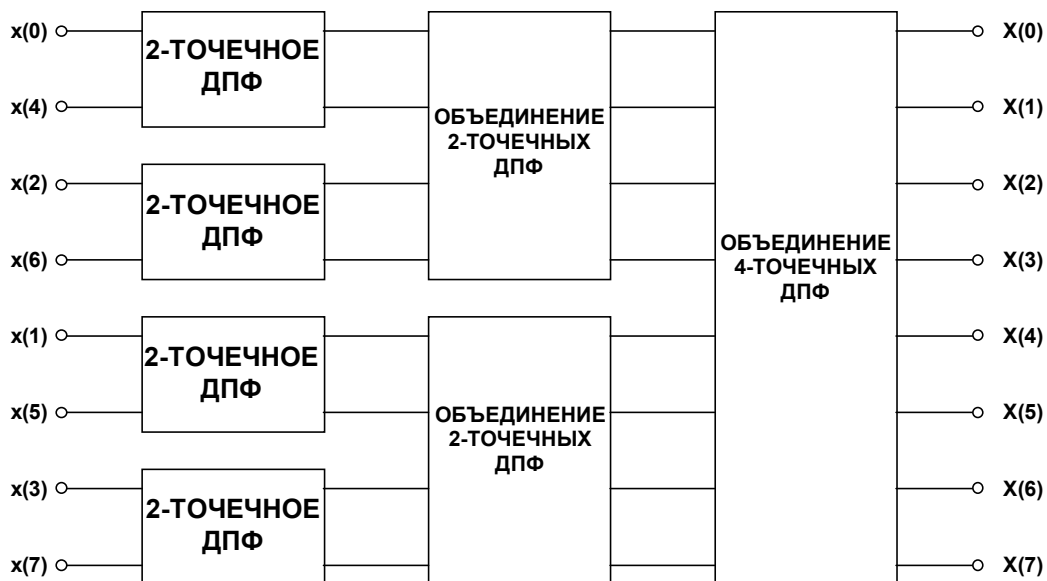


Рис. 5.14

АЛГОРИТМ 8-ТОЧЕЧНОГО БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

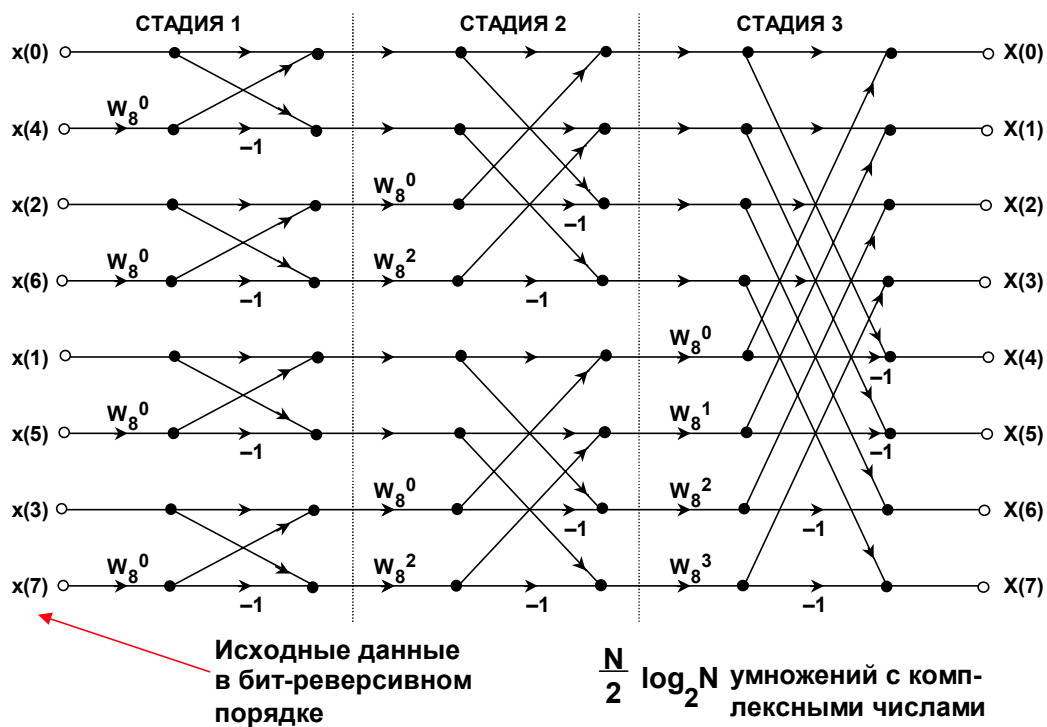


Рис. 5.15

а

Алгоритм реверсирования битов, используемый для реализации прореживания по времени, представлен на рис.5.16. Десятичный индекс n преобразуется в его двоичный эквивалент. Затем двоичные разряды располагаются в обратном порядке и преобразуются обратно в десятичное число. Реверсирование битов часто выполняют аппаратурой ЦОС в генераторе адреса данных (DAG), упрощая таким образом программное обеспечение, сокращая количество дополнительных операций и ускоряя вычисления.

На рис.5.17 и 5.18 представлено вычисление БПФ с использованием алгоритма с прореживанием по частоте (DIF). Этот метод требует, чтобы алгоритм реверсирования был применен к адресам выходных отсчетов $X(k)$. Обратите внимание, что «бабочка» для алгоритма с прореживанием по частоте (DIF) слегка отличается от «бабочки» для алгоритма с прореживанием по времени, как это показано на рис.5.19.

Использование алгоритмов с прореживанием по времени, по сравнению с алгоритмами с прореживанием по частоте, в значительной степени является вопросом предпочтения, так как оба алгоритма дают одинаковый результат. Определенные ограничения той или иной системы могут сделать одно из двух решений оптимальным.

Необходимо отметить, что алгоритмы, требуемые для вычисления обратного БПФ, почти идентичны тем, которые необходимы для вычисления прямого БПФ, если принять во внимание, что речь идет об использовании комплексного БПФ. В действительности, полезный метод проверки алгоритма комплексного БПФ состоит в осуществлении БПФ с отсчетами из временной области $x(n)$, а затем – в вычислении обратного БПФ с отсчетами из частотной области $X(k)$. В конце этого процесса должны быть получены первоначальные отсчеты из временной области $\text{Re } x(n)$, а мнимая часть $\text{Im } x(n)$ должна быть нулевой (в пределах ошибки математического округления).

ПРИМЕР БИТ-РЕВЕРСИВНОГО ПРОРЕЖИВАНИЯ ДЛЯ $N = 8$

■ Десятичное число:	0	1	2	3	4	5	6	7
■ Двоичный эквивалент:	000	001	010	011	100	101	110	111
■ Дв. с реверсированием:	000	100	010	110	001	101	011	111
■ Десятичный эквивалент:	0	4	2	6	1	5	3	7

Рис. 5.16

а

ВЫЧИСЛЕНИЕ 8-ТОЧЕЧНОГО ДПФ В ТРИ ЭТАПА, АЛГОРИТМ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ



Рис. 5.17

АЛГОРИТМ 8-ТОЧЕЧНОГО БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ

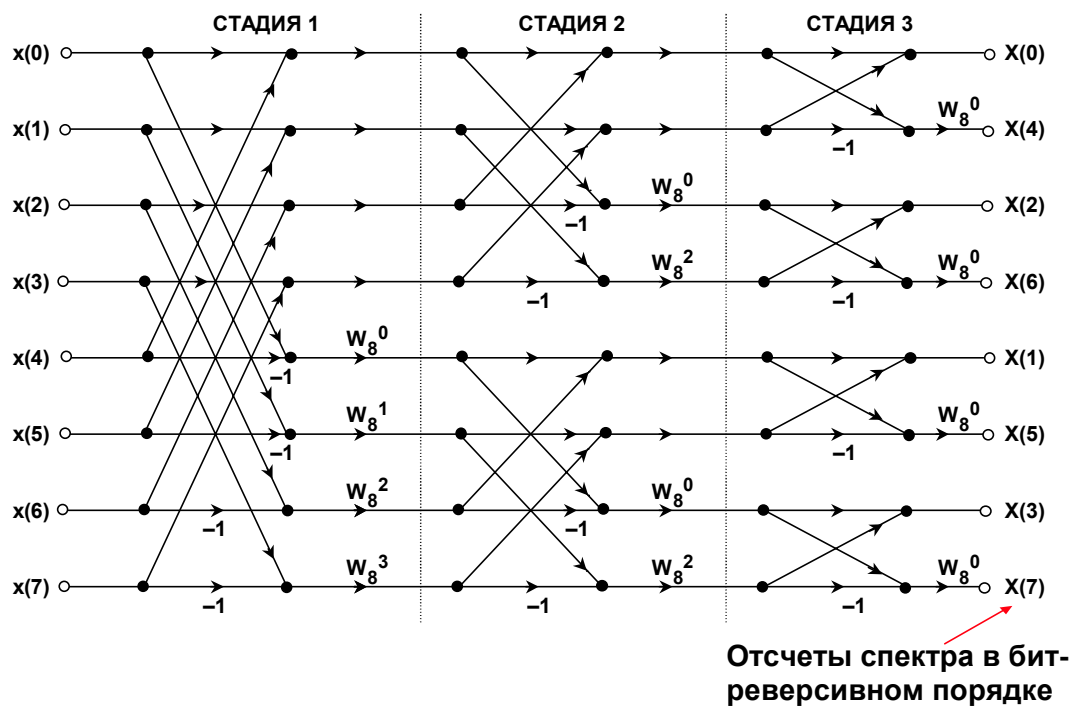


Рис. 5.18

a

БАЗОВАЯ ОПЕРАЦИЯ «БАБОЧКА» В АЛГОРИТМЕ БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ

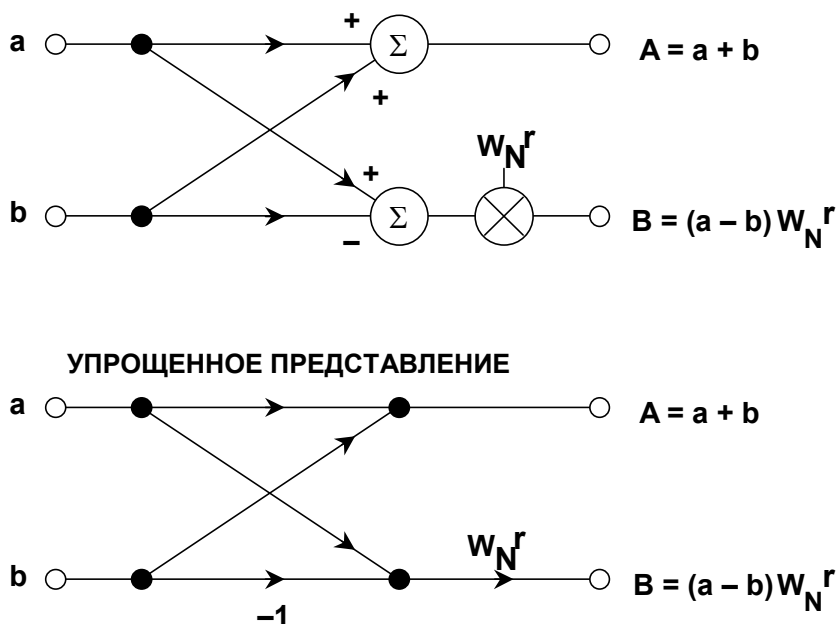


Рис. 5.19

Обсуждавшиеся до сих пор БПФ представляют алгоритм БПФ по основанию 2, то есть их вычисление основано на 2-точечных базовых операциях типа «бабочка».

Подразумевается, что число точек в БПФ должно быть степенью числа 2. Если число точек в БПФ является степенью числа 4, то БПФ может быть разделено на множество 4-точечных ДПФ, показанное на рис.5.20. Такое преобразование называется алгоритмом БПФ по основанию 4. Базовая операция «бабочка» БПФ по основанию 4 с прореживанием по частоте представлена на рис.5.21.

Алгоритм БПФ по основанию 4 требует меньшего количества умножений с комплексными числами, но большего количества операций суммирования, чем БПФ по основанию 2 для такого же количества точек. По сравнению с алгоритмом БПФ по основанию 2, алгоритм по основанию 4 использует более сложную адресацию и дополнительные коэффициенты поворота, но меньшее количество вычислений. Окончательная экономия времени вычисления различается для разных DSP, но алгоритм БПФ по основанию 4 может быть более чем вдвое быстрее, чем алгоритм по основанию 2 для DSP с оптимальной архитектурой.

а

ТРЕХКАСКАДНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ 16-ТОЧЕЧНОГО ДПФ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ПО ОСНОВАНИЮ 4



Рис. 5.20

"БАБОЧКА" АЛГОРИТМА БПФ ПО ОСНОВАНИЮ 4 С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

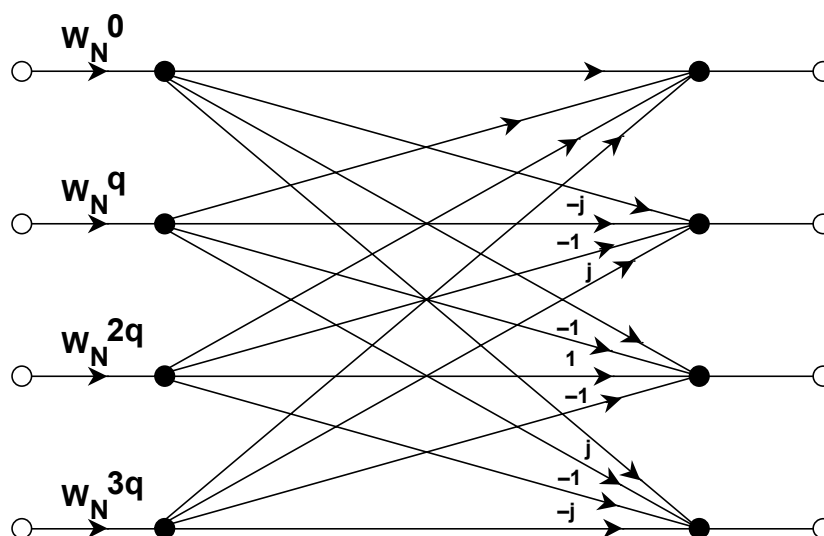


Рис. 5.21

а

АППАРАТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ БПФ

В общем случае, требования по используемой памяти для N -точечного БПФ следующие: N ячеек для вещественных данных, N ячеек для мнимых данных и N ячеек для синусоидальных базисных функций (иногда упоминаемых, как коэффициенты поворота). Дополнительные ячейки памяти будут требоваться в случае использования взвешивания с использованием оконных функций (windowing). Если принятые требования по памяти удовлетворены, DSP должен выполнить необходимые вычисления за требуемое время. Многие производители DSP либо проводят тест производительности для указанного размера БПФ, либо определяют время вычисления для базовой операции «бабочка». При сравнении характеристик БПФ важно удостовериться, что во всех случаях используется одинаковый тип БПФ. Например, тест 1024-точечного БПФ на одном DSP, полученном с помощью алгоритма БПФ по основанию 2, не должен сравниваться с тестом алгоритма БПФ по основанию 4 для другого DSP.

Другое соображение относительно БПФ заключается в выборе процессора с фиксированной или с плавающей точкой. Значения, соответствующие результатам вычисления «бабочки», могут быть больше, чем исходные данные при вычислении «бабочки». Это увеличение обрабатываемых числовых значений может создавать потенциальную проблему в DSP с фиксированным числом разрядов. Для предотвращения переполнения, данные следует масштабировать, заранее оставляя достаточное количество дополнительных разрядов для увеличения значений обрабатываемых данных. Альтернативный метод заключается в том, что данные могут масштабироваться после каждого каскада вычисления БПФ. Методика масштабирования данных после каждого прохода БПФ известна как блочная плавающая точка (*block floating point*). Он называется так, потому что полный массив данных масштабируется как единое целое, независимо от того, действительно ли каждый элемент в блоке требует масштабирования. Блок масштабируется таким образом, чтобы относительные соотношения между данными остались прежними. Например, если каждое слово данных сдвинуто вправо на один разряд (поделено на 2), абсолютные значения изменяются, но относительно друг друга соотношения данных остаются прежними.

В 16-разрядном DSP-процессоре с фиксированной точкой после умножения формируется 32-разрядное слово. Семейство цифровых сигнальных процессоров Analog Devices ADSP21xx характеризуется расширенным динамическим диапазоном, который реализуется в операциях умножения с накоплением посредством 40-разрядного внутреннего регистра аккумулятора.

Использование DSP-процессора с плавающей точкой устраняет потребность в масштабировании данных и поэтому приводит к более простой реализации алгоритма БПФ, но следствием этого упрощения является увеличение времени обработки, которое требуется для сложных арифметических вычислений с плавающей точкой. Кроме того, 32-разрядный DSP-процессор с плавающей точкой, очевидно, будет иметь меньший уровень шумов округления, чем 16-разрядный DSP-процессор с фиксированной точкой. На рис.5.22 приведены данные по реализации БПФ для популярных DSP-процессоров Analog Devices. В частности, что DSP-процессор ADSP-TS001 TigerSHARC™ предлагает оба режима: и с плавающей, и с фиксированной точкой, обеспечивая, таким образом, исключительную гибкость программирования.

а

РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ БПФ ПО ОСНОВАНИЮ 2 НА РАЗЛИЧНЫХ ПРОЦЕССОРАХ

- **ADSP-2189M, 16 разрядов, фиксированная точка**
 - ◆ 453 мкс (1024 точки)

- **ADSP-21160 SHARC™, 32 разряда, плавающая точка**
 - ◆ 90 мкс (1024 точки)

- **ADSP-TS001 TigerSHARC™ 150 MHz,**
 - ◆ 16 разрядов, режим с фиксированной точкой
 - 7,3 мкс (256 точек БПФ)
 - ◆ 32 разряда, режим с плавающей точкой
 - 69 мкс (1024 точки)

Рис. 5.22

ТРЕБОВАНИЯ К DSP ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ БПФ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

Существует два основных способа обработки сигналов в реальном масштабе времени: обработка одного отсчета в каждый момент времени (непрерывная обработка) и обработка одного пакета данных в каждый момент времени (пакетная обработка). Системы, основанные на непрерывной обработке, такие как цифровой фильтр, получают данные в виде одного отсчета в каждый момент времени. В каждом такте новый отсчет поступает в систему, а обработанный отсчет передается на выход. Системы, основанные на пакетной обработке, такие как построенный на БПФ цифровой анализатор спектра, получают данные в виде целого пакета отсчетов. Происходит обработка всего пакета исходных данных, результатом которой является пакет преобразованных выходных данных.

Для обеспечения функционирования в реальном масштабе времени полный расчет БПФ должен выполняться в промежутке, соответствующем времени накопления одного пакета данных. Предполагается, что, пока производится вычисление БПФ текущего пакета данных, DSP-процессор накапливает данные для следующего пакета. Накопление данных является одной из сфер, где важную роль играют специальные архитектурные особенности DSP. Непрерывное получение данных облегчается, благодаря возможностям гибкой адресации данных в DSP в сочетании с использованием различных каналов прямого доступа к памяти (DMA).

Рассмотрим DSP процессор ADSP-TS001 TigerSHARC, который вычисляет 1024-точечное 32-разрядное комплексное БПФ с плавающей точкой за 69 мкс. Очевидно, что максимальная частота дискретизации равна $1024/69 \text{ мкс} = 14,8 \text{ MSPS}$. Это подразумевает, что сигнал имеет ширину полосы частот меньшую, чем 7,4 МГц. Также предполагается, что нет дополнительных затрат процессорного времени, связанных с БПФ, или ограничений, связанных с передачей данных.

а

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ БПФ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

- Предположим, что время выполнения 1024-точечного алгоритма БПФ по основанию 2 равно 69 мкс (TigerSHARC, 32-разрядный режим)
- f_s (maximum) < $\frac{1024 \text{ отсчета}}{69 \text{ мкс}} = 14,8 \text{ MSPS}$
- Следовательно, ширина полосы входного сигнала < 7,4 МГц
- Это подразумевает отсутствие дополнительных операций, связанных с реализацией БПФ и передачей входных/выходных данных

Рис. 5.23

Приведенный пример дает оценку максимальной ширины полосы сигнала, который может быть обработан данным DSP-процессором с учетом характеристик реализованного на нем БПФ. Другой подход состоит в том, чтобы, задаваясь шириной полосы сигнала, разработать требования к DSP для обработки сигнала в рассматриваемой полосе. Если ширина полосы частот сигнала известна, требуемая частота дискретизации может быть определена путем ее умножения на коэффициент 2 - 2,5 (увеличение частоты дискретизации может потребоваться для ослабления требований к предшествующему АЦП ФНЧ, устраняющему эффект наложения спектра, (antialiasing filter)). Следующим шагом определяется число точек БПФ, требуемое для достижения желаемой разрешающей способности по частоте. Разрешающая способность по частоте получается делением скорости дискретизации f_s на число точек БПФ N . Эти и другие соображения по поводу БПФ представлены на рис.5.24.

Число точек БПФ также определяет минимальный уровень шума БПФ относительно уровня широкополосного шума, и это также должно быть учтено при выборе числа точек БПФ. На рис.5.25 представлены соотношения между уровнем сигнала, соответствующим полному динамическому диапазону системы, уровнем широкополосного шума (измеренного в ширине полосы от 0 до $f_s/2$) и минимальным уровнем шума БПФ. Обратите внимание, что выигрыш в отношении сигнал/шум БПФ определяется числом точек БПФ. БПФ действует подобно аналоговому анализатору спектра с шириной полосы развертки f_s/N . Увеличение числа точек повышает разрешающую способность БПФ и сужает полосу пропускаемых им частот, сокращая, таким образом, минимальный уровень шума. В этом анализе мы пренебрегли шумом, вызванным ошибкой округления при реализации БПФ. На практике АЦП, который используется для оцифровки сигнала, производит шум квантования, который является доминирующим шумовым источником в системе.

Теперь пришло время исследовать характеристики реально существующих DSP-процессоров и время реализации БПФ на этих процессорах, чтобы представить себе, при каких условиях мы можем осуществлять обработку сигналов в реальном масштабе времени. Это означает, что БПФ должно быть рассчитано в течение времени накопления пакета данных, равного N/f_s . Другие соображения, такие как использование процессора с фиксированной точкой в сравнении с процессором с плавающей точкой, использование алгоритма по основанию 2 в сравнении с алгоритмом по основанию 4, потребляемая

а

процессором мощность и стоимостные показатели, могут также представить предмет для рассмотрения.

РЕАЛИЗАЦИЯ БПФ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

- Ширина полосы сигнала
- Частота дискретизации f_s
- Количество точек БПФ, N
- Разрешающая способность по частоте = f_s / N
- Макс. время вычисления N -точечного БПФ N / f_s
- Фиксированная точка или плавающая точка
- Время выполнения алгоритма БПФ по основанию 2 по сравнению с БПФ по основанию 4
- Выигрыш БПФ в отношении сигнал/шум = $10 \log_{10}(N / 2)$
- Требования взвешивания с использованием оконной функции (Windowing)

Рис. 5.24

ВЫИГРЫШ В ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ/ШУМ ПРИ БПФ БЕЗ УЧЕТА ОШИБКИ ОКРУГЛЕНИЯ



Рис. 5.25

а

РАСШИРЕНИЕ СПЕКТРА АНАЛИЗИРУЕМОГО СИГНАЛА И ВЗВЕШИВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОКОННОЙ ФУНКЦИИ

Расширение спектра анализируемого сигнала при вычислении БПФ может быть лучше всего проиллюстрировано на выполнении N-точечного БПФ с синусоидальным входным сигналом. Будет рассмотрено две ситуации. В первом случае соотношение между частотой дискретизации и частотой входного синусоидального сигнала таково, что в выборке содержится в точности целое число периодов синусоидального сигнала. Напомним, что вычисление ДПФ предполагает, что выборка повторяется бесконечное число раз до и после исследуемого фрагмента сигнала, формируя таким способом бесконечный непрерывный периодический сигнал, как показано на рис.5.26. При таких условиях форма входного сигнала представляет собой непрерывную синусоидальную функцию, и на выходе ДПФ или БПФ будет один ненулевой частотный отсчет, соответствующий частоте входного сигнала.

БПФ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА С ЦЕЛЫМ ЧИСЛОМ ПЕРИОДОВ В ВЫБОРКЕ

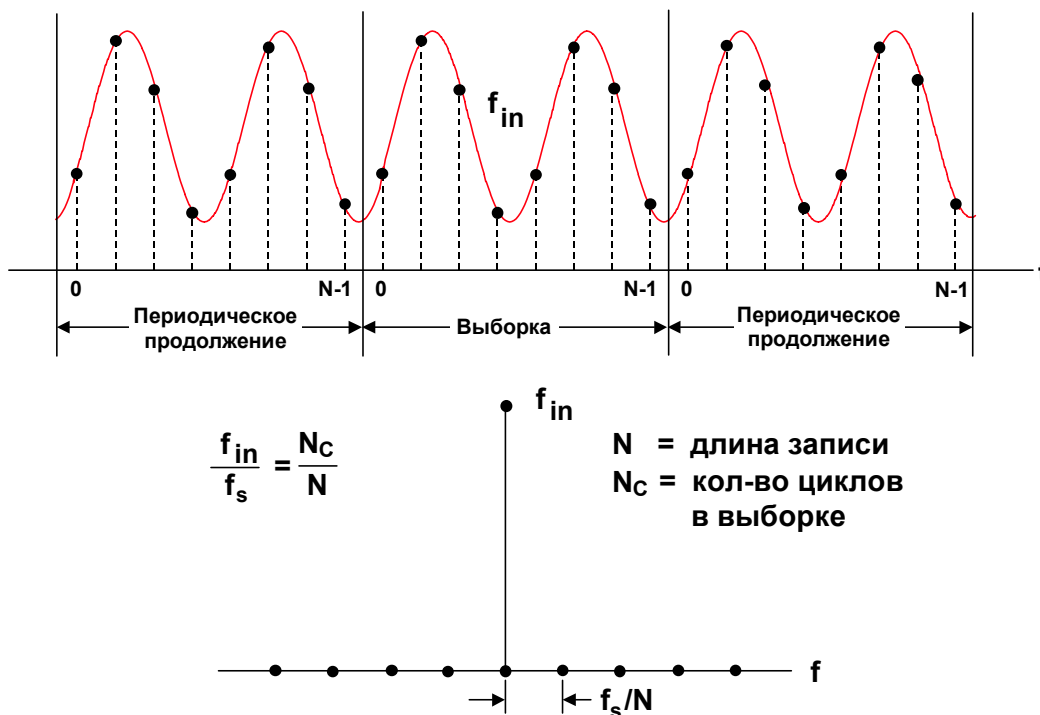


Рис. 5.26

Рис.5.27 отражает ситуацию, когда в выборке нет целого числа периодов синусоидального сигнала. Разрывы, которые образуются в конечных точках выборки, приводят к расширению спектра анализируемого сигнала вследствие появления дополнительных гармоник. В дополнение к появлению боковых лепестков, происходит расширение основного лепестка, что приводит к снижению разрешающей способности по частоте. Этот процесс эквивалентен перемножению входного синусоидального сигнала с прямоугольным импульсом, который имеет известную частотную характеристику $\sin(x)/x$ и связанные с этим широкий основной лепесток и боковые лепестки.

а

ВЗВЕШИВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ ОКНА ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ ЭФФЕКТА РАСШИРЕНИЯ СПЕКТРА

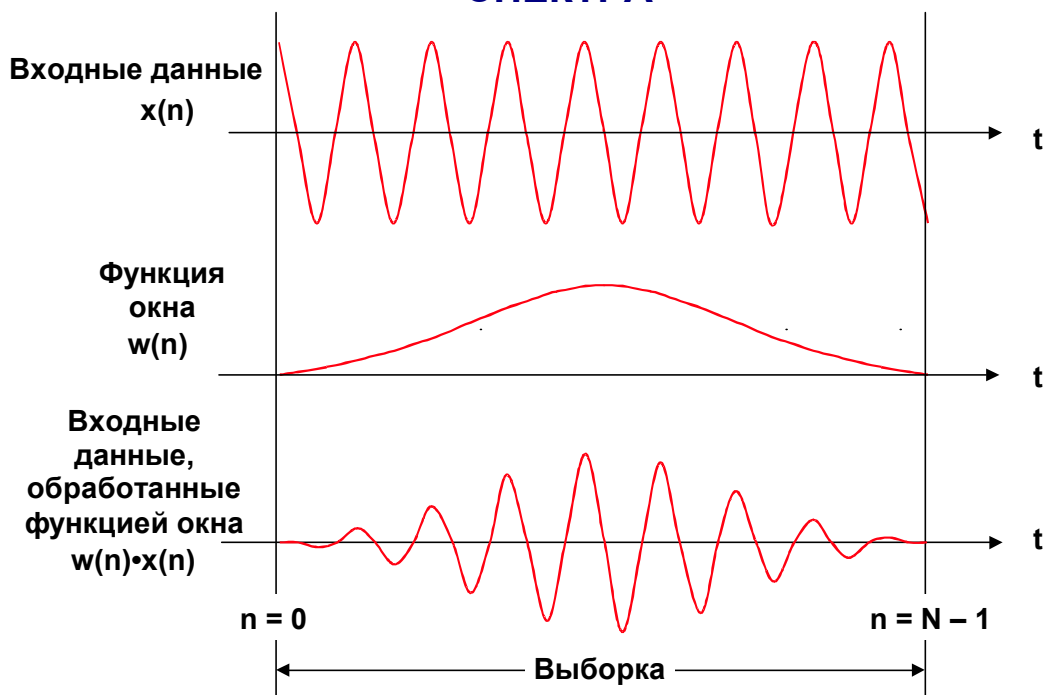


Рис. 5.28

НЕКОТОРЫЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОКНА

■ Хемминга: $w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \left[\frac{2\pi n}{N} \right]$

■ Блэкмана: $w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \left[\frac{2\pi n}{N} \right] + 0.08 \cos \left[\frac{4\pi n}{N} \right]$

■ Хеннинга: $w(n) = 0.5 - 0.5 \cos \left[\frac{2\pi n}{N} \right]$

■ Минимальная 4-элементная Блэкмана-Харриса

$$w(n) = 0.35875 - 0.48829 \cos \left[\frac{2\pi n}{N} \right] + 0.14128 \cos \left[\frac{4\pi n}{N} \right] - 0.01168 \cos \left[\frac{6\pi n}{N} \right]$$

$0 \leq n \leq N - 1$

Рис. 5.29

а

ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОКНА, ОКОН ХЕММИНГА И БЛЭКМАНА ДЛЯ N = 256

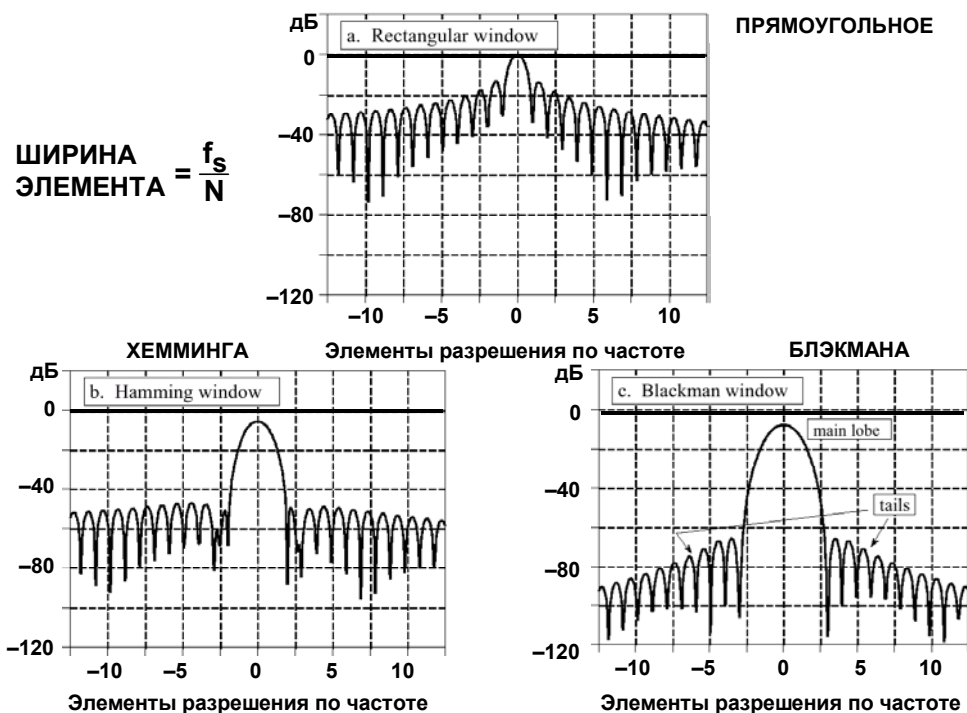


Рис. 5.30

РАСПРОСТРАНЕННЫЕ ОКНА И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Функции окна	3 дБ ширины полосы	6 дБ ширины полосы	Наивысший боковой лепесток (дБ)	Спад бокового лепестка (дБ/октава)
Прямоуг.	0,89	1,21	-12	6
Хамминга	1,3	1,81	-43	6
Блэкмана	1,68	2,35	-58	18
Ханнинга	1,44	2,00	-32	18
Минимальная 4-элементная Блэкмана-Харриса	1,90	2,72	-92	6

Рис. 5.31

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steven W. Smith, **The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing**, Second Edition, 1999, California Technical Publishing, P.O. Box 502407, San Diego, CA 92150. Also available for free download at: <http://www.dspguide.com> or <http://www.analog.com>
2. C. Britton Rorabaugh, **DSP Primer**, McGraw-Hill, 1999.
3. Richard J. Higgins, **Digital Signal Processing in VLSI**, Prentice-Hall, 1990.
4. A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, **Digital Signal Processing**, Prentice-Hall, 1975.
5. L. R. Rabiner and B. Gold, **Theory and Application of Digital Signal Processing**, Prentice-Hall, 1975.
6. John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis, **Introduction to Digital Signal Processing**, MacMillan, 1988.
7. Fredrick J. Harris, *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, **Proc. IEEE**, Vol. 66, No. 1, 1978 pp. 51-83.
8. R. W. Ramirez, **The FFT: Fundamentals and Concepts**, Prentice-Hall, 1985.
9. J. W. Cooley and J. W. Tukey, *An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series*, **Mathematics Computation**, Vol. 19, pp. 297-301, April 1965.
10. **Digital Signal Processing Applications Using the ADSP-2100 Family**, Vol. 1 and Vol. 2, Analog Devices, Free Download at: <http://www.analog.com>
11. **ADSP-21000 Family Application Handbook**, Vol. 1, Analog Devices, Free Download at: <http://www.analog.com>